

Chapitre 8 : Généralités sur les suites numériques

I. Définition et représentation graphique

1) Définition d'une suite numérique

Exemple d'introduction :

On considère une liste de nombres formée par tous les nombres impairs rangés dans l'ordre croissant : 1, 3, 5, 7, ...

On note (u_n) l'ensemble des "éléments" de cette suite de nombres tel que :

$$u_0 = 1, u_1 = 3, u_2 = 5, u_3 = 7, \dots$$

On a ainsi défini une suite numérique.

On peut lui associer une fonction définie sur $\mathbb{N}$ par $u : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$

$$n \mapsto u(n) = u_n \quad \text{avec } u_n = 2n + 1$$

Définitions : Une **suite numérique** (u_n) est une liste ordonnée de nombres réels telle qu'à tout entier n on associe un nombre réel noté u_n .

u_n est appelé le terme de rang n de la suite (u_n)

2) Générer une suite numérique par une formule explicite

Exemple :

On définit la suite (u_n) par : $u_n = 2n^2 - 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Les premiers termes de cette suite sont donc :

$$u_0 = -1$$

$$u_1 = 1$$

$$u_2 = 7$$

Remarque : Lorsqu'on génère une suite par une formule explicite, chaque terme de la suite est exprimé en fonction de n et indépendamment des termes précédents.

3) Générer une suite numérique par une relation de récurrence

Exemple :

On définit la suite (v_n) par :

$$v_0 = 3 \text{ et pour tout } n \text{ de } \mathbb{N}, v_{n+1} = 4v_n - 6$$

Les premiers termes de cette suite sont donc :

$$v_1 = 4 \times v_0 - 6 = 6$$

$$v_2 = 4 \times v_1 - 6 = 18$$

$$v_3 = 4 \times v_2 - 6 = 66$$

Contrairement à une suite définie par une formule explicite, il n'est pas possible de calculer par exemple v_{13} sans connaître v_{12} .

Cependant il est possible d'écrire un algorithme avec Python :

```
v = 3 ← v₀
for i in range(13) ← rang que je cherche
    v = 4 * v - 6 ← relation de récurrence
    print(v)
```

Remarque : Lorsqu'on génère une suite par une relation de récurrence, chaque terme de la suite s'obtient à partir d'un (ou plusieurs) des termes précédents.

4) Représentation graphique d'une suite

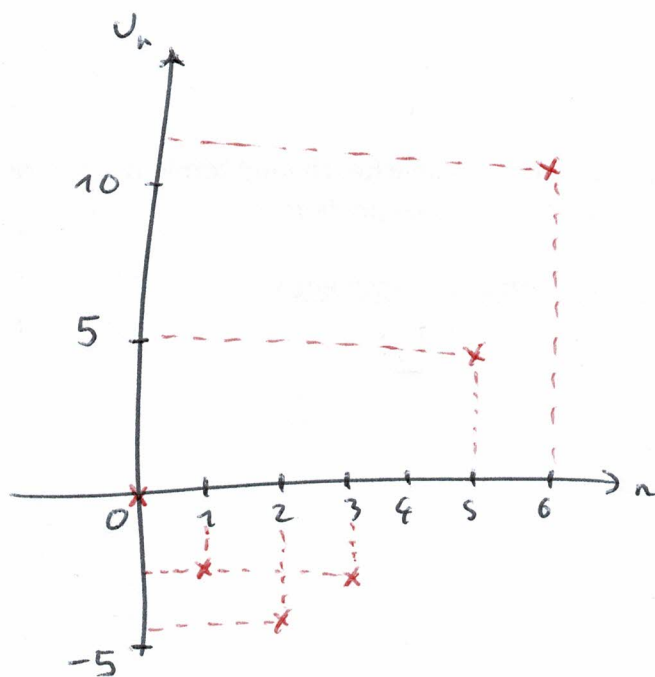
Dans un repère du plan, on représente une suite par un nuage de points de coordonnées $(n; u_n)$.

Exemple :

Pour tout n de $\mathbb{N}$, on donne : $u_n = n^2 - 4n$

On construit le tableau de valeurs avec les premiers termes de la suite :

n	0	1	2	3	4	5	6
u_n	0	-3	-4	-3	0	5	12



II. Sens de variation d'une suite numérique

Exemple :

Sur l'exemple précédent, on peut conjecturer que la suite est croissante pour $n \geq 2$

Définitions : Soit un entier p et une suite numérique (u_n) .

- La suite (u_n) est **croissante à partir du rang p** signifie que pour $n \geq p$, on a

$$u_{n+1} \geq u_n \Leftrightarrow u_{n+1} - u_n \geq 0$$

- La suite (u_n) est **décroissante à partir du rang p** signifie que pour $n \geq p$, on a

$$u_{n+1} \leq u_n \Leftrightarrow u_{n+1} - u_n \leq 0$$

Méthode : Étudier les variations d'une suite.

Pour tout n de $\mathbb{N}^*$, on donne la suite (v_n) définie par : $v_n = \frac{1}{n}$.

Démontrer que la suite (v_n) est décroissante sur $\mathbb{N}^*$

$$\begin{aligned} \forall n \in \mathbb{N}, v_{n+1} - v_n &= \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n} \\ &= \frac{n}{n(n+1)} - \frac{n+1}{n(n+1)} \\ &= \frac{n}{n(n+1)} - \frac{n+1}{n(n+1)} = \frac{-1}{n(n+1)} \leq 0 \text{ car } n \in \mathbb{N}^* \end{aligned}$$

Propriété : Soit une fonction f définie sur $[0; +\infty[$ et une suite numérique (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $u_n = f(n)$. Soit un entier p .

- Si f est croissante sur l'intervalle $[p; +\infty[$, alors la suite (u_n) est croissante à partir du rang p .

- Si f est décroissante sur l'intervalle $[p; +\infty[$, alors la suite (u_n) est décroissante à partir du rang p .

Démonstration :

$\forall n \in p, u_{n+1} - u_n = f(n+1) - f(n) \geq 0$ car f est croissante sur $[n; +\infty[$
donc (u_n) croissante à partir du rang p .

Exemple :

$$u_n = \sqrt{n}$$

Soit $f : x \in \mathbb{R} \mapsto \sqrt{x}$

$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = f(n)$, car f croissante sur $[0; +\infty[$

donc (u_n) croissante sur $\mathbb{N}$

III. Notion de limite d'une suite

1) Suite convergente

Exemple :

Pour tout $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, on considère la suite (u_n) définie par : $u_n = \frac{4n+1}{n}$.

On construit le tableau de valeurs avec des termes de la suite :

n	1	2	3	5	10	100	1000
u_n	5	4,5	$\frac{13}{3}$	$\frac{21}{5}$	4,1	4,01	4,001

Plus n devient grand, plus les termes de la suite semblent se rapprocher de 4

On dit que la suite (u_n) converge vers 4 et on note $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 4$

2) Suite divergente

Exemples :

a) Pour tout n de $\mathbb{N}$, on considère la suite (u_n) définie par : $u_n = n^2 + 1$.

Calculons quelques termes de cette suite :

$$u_0 = 1$$

$$u_1 = 2$$

$$u_2 = 5$$

$$u_{10} = 101$$

$$u_{100} = 10001$$

Plus n devient grand, plus les termes de la suite semblent devenir grand

On dit que la suite (u_n) diverge en $+\infty$

b) Pour tout n de $\mathbb{N}$, on considère la suite (v_n) définie par : $v_n = (-1)^n$

Calculons les premiers termes de cette suite :

$$v_0 = 1$$

$$v_1 = -1$$

$$v_2 = 1$$

Lorsque n devient grand, les termes de la suite alternent entre 1 et -1,

v_n est divergente.